Kształtowanie podstaw dla myślenia matematycznego
(materiały do dyskusji)

Ewa Swoboda, Instytut Matematyki Uniwersytetu Rzeszowskiego
eswoboda@univ.rzeszow.pl

1. Rozważania na tle problemu „matematyki dla najmłodszych”

Matematyka może mieć wiele twarzy. Jako przedmiot szkolny nie jest jednak zbiorem faktów i algorytmów do nauczenia się. Wprawdzie w wyniku uczenia się matematyki uczeń powinien posiąść wiedzę o faktach (np. jak jest zbudowany układ pozycyjny dziesiątkowy) i nabyć określonych sprawności (np. mnożenia pisemnego), jednak przede wszystkim matematyka to ludzka aktywność (Freudenthal 1978, da Ponte 2003), i ten aspekt winien być wyakcentowany podczas lekcji matematyki. Dzięki (między innemu) uczeniu się matematyki uczeń powinien umieć elastycznie myśleć, rozwiązywać problemy, tworzyć modele i schematy, dostrzegać regularności, formułować i testować hipotezy, oceniać i zajmować własne stanowisko, myśleć refleksyjnie, uogólniać.

W wielu europejskich programach nauczania przyjmuje się, że matematyka małych dzieci, traktowana jako specyficzna ludzka aktywność, nie różni się istotnie od matematyki dzieci starszych, czy też osoby dorosłej. Nie rozdziela się nauczania matematyki na matematykę wczesno– i późno- szkolną; na każdym etapie kształcenia obowiązują te same cele długoterminowe. Niewątpliwie inny jest poziom rozwoju umysłowego dziecka i osoby dorosłej, inny zakres doświadczeń praktycznych i teoretycznych, inny sposób organizowania myślenia. Ale dziecko rozwiązując matematyczny problem na swoim poziomie musi dokonać wielu czynności, które charakteryzują działalność matematyczną w ogóle. Powinno umieć określić na czym dany problem polega i jakimi metodami można go rozwiązywać, które elementy danej sytuacji są istotne a które nie, umieć znaleźć zależności pomiędzy istotnymi zmiennymi, często – zapisać je symbolicznie. W argumentacji związanej z zauważonymi związkami powinno odwoływać się do reguł ogólnych, wychodząc poza związki istniejące w wykorzystywanej w pracy reprezentacji. Światowe badania potwierdzają, że już dzieci 6-7 letnie są w stanie dostrzec i zrozumieć ogólność zachodzenia pewnych związków. Dlatego każda *lista celów kształcenia matematycznego dzieci winna zawierać również tzw. cele ogólne: “matematyzowanie”, “odkrywanie”, “rozumowanie”, “komunikowanie”, które odzwierciedlają podstawowe składniki budowania matematyki na wszystkich poziomach* (wg.: Wittmann , 2001*)*

Oczywiście nie zakłada się, że wszystkie dzieci są w tym samym stopniu uzdolnione w kierunku matematycznego myślenia. Badania prowadzone w Uniwersytecie Warwick (przez D. Tall’a i E. Gray’a) dotyczące przygotowania dzieci do uczenia się matematyki pokazują, na czym polega zasadnicza różnica pomiędzy dziećmi wybitnie uzdolnionymi matematycznie a tymi, które mają duże trudności w uczeniu się matematyki. Wynika z nich, że cechą wyróżniającą dzieci „matematycznie uzdolnione” jest specyficzny sposób organizowania i interpretowania informacji. Dzieci te od razu nastawione są na szukanie związków, relacji, na abstrahowanie i uogólnianie, stąd każda docierająca do nich informacja już na wejściu jest selekcjonowania w kierunku wydobywania tych związków. Związki te, są potem wykorzystywane w dalszym myśleniu i argumentowaniu. Odwrotnie - dzieci charakteryzowane jako te, które bardzo trudno uczą się matematyki – każdą przedstawioną sytuację widzą indywidualnie, bardzo często ubogacają ją o nieistniejące szczegóły, nie widzą (nie szukają) żadnych zależności ani tym bardziej takich zależności nie starają się wykorzystywać.

Przytoczone fakty sugerują, że działania nauczycieli na poziomie matematyki wczesnoszkolnej powinny być ukierunkowane zarówno poprzez specyfikę matematyki jako nauki, epistemologię i historię kształtowania pojęć matematycznych oraz wyniki psychologiczno – pedagogicznych badań dotyczących specyfiki myślenia dziecka. Matematyka jest nauką, której korzenie tkwią w otaczającej nas rzeczywistości, jednak w swojej dojrzałej postaci jest postrzegana jako świat idei, uporządkowany dedukcyjnie. Droga od świata materialnego do świata idei z natury rzeczy nie może być łatwa ani krótka. Biorąc pod uwagę złożoność procesów myślowych, które są potrzebne do budowania swojej własnej matematyki przez ucznia, przygotowanie do budowania tego świata powinno zaczynać się jak najwcześniej, zaś każde matematyczne pojęcie, procedura winno być traktowane w kształceniu jako obiekt, który może funkcjonować na różnych poziomach swej dojrzałości.

Przyjmuję więc, że warto w bardzo świadomy sposób jak najwcześniej zacząć przygotowywać dzieci do umiejętności myślenia abstrakcyjnego. O ile jednak w stosunku do nauki czytania i pisania przedszkola realizują długoterminowy program przygotowujący (obejmuje on już trzylatków), to dla matematyki takie podejście wciąż jeszcze nie zostało wypracowane. W przypadku matematyki przyjęto zupełnie inna strategię: zostały wyróżnione tematycznie pewne zagadnienia, które są wprost ukierunkowane na hasła i pojęcia matematyczne: stosunki przestrzenne, stosunki wielkościowe, stosunki czasowe, kształty i nazwy figur, zbiory i ich klasyfikacja, liczebność zbiorów. Tego typu podejście jest też na ogół realizowane w nauczaniu wczesnoszkolnym, gdzie nacisk jest położony na ćwiczenie określonych procedur i sprawność rachunkową.

Przytoczone fakty ukierunkowały moją własną pracę, w której przyjęłam następujące założenia:

- Sukces w uczeniu się matematyki nie jest uzależniony jedynie od tzw. „wrodzonych predyspozycji". Każde dziecko bez zaburzeń rozwojowych może aktywnie i z powodzeniem uczestniczyć w zajęciach z matematyki.
- Dziecko powinno być odpowiednio przygotowane do zetknięcia się z pojęciami i procedurami matematycznymi. Okres przygotowawczy nie może być krótki. Rozciągnięcie w czasie, różnorodność zajęć ukierunkowanych na ten sam cel dydaktyczny i odpowiednie rozłożenie akcentów na poszczególne składniki pozwoli dzieciom na indywidualne budowanie skryptów, pomocnych w dalszym funkcjonowaniu na zajęciach matematycznych.
- Stabilne, dobrze ukształtowane skrypty wpływają na pozytywną samoocenę co jest czynnikiem motywującym do podejmowania nowych zadań. Taka motywacja, wiara we własne siły, przekonanie o umiejętności samodzielnego rozwiązania zadania, jest niezbędnym elementem w procesie uczenia się matematyki.
- Myślenie matematyczne wymaga umiejętności abstrahowania, przy równoczesnej umiejętności dostrzegania związków. Przygotowanie dzieci do rozumienia pojęć i procedur matematycznych powinno zawierać (jako istotny element) takie zajęcia, które będą uczyć na jakich fragmentach informacji warto skupiać uwagę i w jaki sposób stukturyzować informacje, by wydobywała ona związki i relacje. Są to takie zajęcia, gdzie dziecko ma szansę dostrzegania regularności, funkcjonowania w świecie rytmów i powtarzających się prawidłowości. Szczególne znaczenie mają tutaj regularności geometryczne, w których informacja jest odbierana wizualnie.
- Umiejętność wnioskowania i argumentowania jest niezbędna w posługiwaniu się matematyką. Dlatego istotną częścią pracy wspierającej myślenie matematyczne u dzieci przedszkolnych i na poziomie wczesnoszkolnym są takie zajęcia, które dawałyby szansę na gromadzenie doświadczeń w zakresie:
    1. umiejętności „wymyślania" własnych reguł, zasad,
    2. umiejętności argumentowania, przekonywania, obrony własnego poglądu.

2. Rozważania na tle problemu „przygotowanie nauczyciela do uczenia matematyki dla najmłodszych"

Działania nauczyciela nie mogą być nastawione na zapoznawanie ucznia z faktami i procedurami, ale na ćwiczenie jego sprawności umysłowej.

Europejskie standardy kształcenia nauczyciela matematyki opierają się głównie na konstruktywistycznym poglądach, czerpiących z piagetowskich wyników badania procesów myślowych ucznia, uwzględniających specyfikę myślenia dziecka na różnych poziomach jego rozwoju (Wood, 1998). W związku z tym dziecko, tworząc swoją własną matematykę ma prawo (i obowiązek) odwoływania się do własnych doświadczeń i własnego rozumienia zjawisk i faktów (myślenie refleksyjne). Zakłada się, że podczas lekcji matematyki uczeń powinien sam konstruować swoją wiedzę (wiedza ta jest nieprzenośna). Jest to ta strona zagadnienia uczenia się matematyki, która podkreśla perspektywę wewnętrzną (rozwój osobowy jednostki). Rolą nauczyciela jest sterowanie tym procesem poprzez odpowiedni dobór zadań i problemów do rozwiązania, i poprzez stymulowanie myślenia refleksyjnego dziecka.

Z drugiej strony uważa się, że matematyka ma wymiar społeczny, a matematyczne poznanie przebiega w równej mierze co przy perspektywie wewnętrznej - w wyniku wzajemnego komunikowania się (Steinbring 2003, Hejny&Kurina 2001). Tutaj oczekuje się od nauczyciela umiejętności prowadzenia dyskursu w klasie. W zestawieniu z ogólnie akceptowanym stwierdzeniem, że „matematyka jest częścią dziedzictwa ludzkiej myśli " (Abrantes, 2001) z jednej strony, i że „rozumienie matematyki wykracza poza wąsko rozumianą wiedzę o wybranych pojęciach i ich własnościach" widać, że uczenie matematyki wymaga takiego jej rozumienia, które umożliwiałoby realizację wszystkich wyżej wymienionych haseł.

2. Omówienie przeprowadzonych badań ankietowych

2.1. Opis grupy uczestniczącej w badaniach

Badanie postaw nauczycieli i studentów wobec matematyki szkolnej prowadziłam w latach 2003 – 2004, głównie wśród studentów studiów zaocznych. Podstawową grupę badawczą stanowiło 118 studentów studiów zaocznych Wydziału Pedagogicznego Uniwersytetu Rzeszowskiego. Byli to studenci, którzy w swojej siatce godzin mieli matematykę lub wybrane zagadnienia metodyki matematyki – czyli tacy studenci, którzy po ukończeniu studiów nabędą uprawnień do pracy z dzieckiem na zajęciach z matematyki. Ankietę wypełniali podczas pierwszego spotkania ze mną, czyli przed rozpoczęciem kursu matematyki na studiach.

Drugą grupę (34 osoby) stanowili czynni nauczyciele, na ogół z wieloletnim stażem, pracujący w przedszkolach lub szkołach podstawowych województwa podkarpackiego.

Badania w obu grupach były anonimowe. Celem ankiety było

- Rozpoznanie obrazu matematyki szkolnej oraz postaw wobec matematyki wśród studentów zaocznych kierunków pedagogicznych, rozpoczynających studia,
- Skonfrontowanie tego obrazu z poglądami czynnych nauczycieli z nauczania początkowego,
- Określenie podstawowych problemów pracy ze studentami, w kierunku osiągania standardów przygotowania zawodowego (wiedza dla mnie, jako osoby prowadzącej zajęcia).

Ankieta w swej podstawowej części składała się pytań zamkniętych. Jedno z pytań zostało wyskalowane. W tej pracy przedstawię obraz, jaki został zarysowany w wyniku opracowania kilku pytań ankiety.

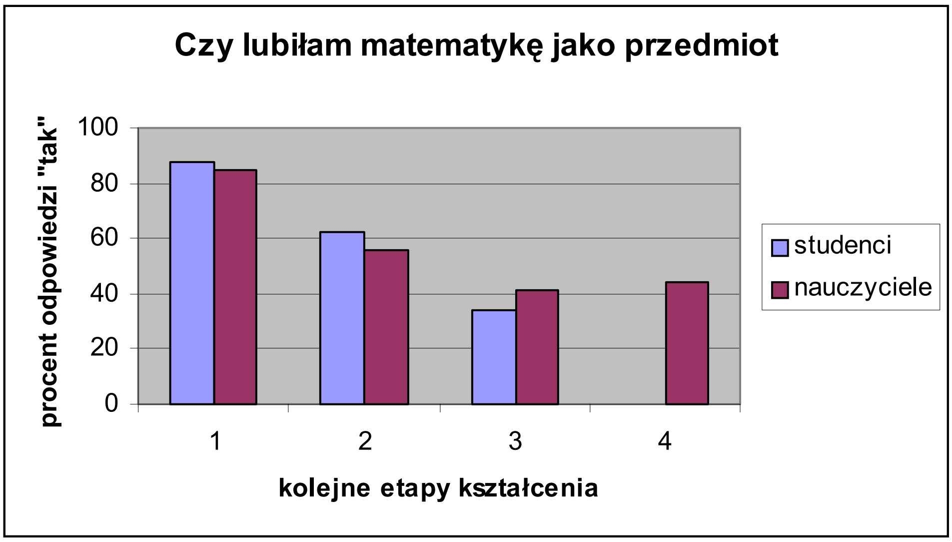
2.2. Wyniki ankiety

1. Obraz matematyki wyniesiony z nauki w szkole

Pytanie było następujące: 6. Czy lubił/a Pan/Pani matematykę jako przedmiot w

a.	klasach początkowych	TAK	NIE
b.	w starszych klasach szkoły podstawowej	TAK	NIE
c.	w szkole średniej	TAK	NIE
d.	na studiach	TAK	NIE

Zarówno w grupie studentów, którzy zamierzają zdobyć zawód nauczyciela, jak i nauczycieli wykonujących ten zawód, sympatia dla matematyki zmieniała się w trakcie całego okresu jej nauki, i to w ten sam sposób. Te zmiany obrazuje wykres



W różnych okresach własnej edukacji matematyka była przez samych nauczycieli różnie postrzegana – z tendencją zmiany od przedmiotu bardzo lubianego, do raczej nie lubianego. Wszyscy pamiętają matematykę wczesnoszkolną jako przedmiot lubiany (w ponad 80%). Ten stosunek zmienia się na raczej obojętny (56% – 62%) w starszych klasach szkoły podstawowej, by przerodzić się w raczej niechętny (34% - 41%) w szkole średniej. Taki wynik jest być może typowy, i oddaje ogólny brak sympatii do matematyki. Jednak w grupie nauczycieli jest on niepokojący. Własne doświadczenia szkolne rzutują na podejście do matematyki. Wydaje się, że taka postawa może mieć wpływ na sposób realizowania przez nich przedmiotu w procesie nauczania, a przecież nauczyciel powinien lubić to co robi.

2. Poglądy na matematykę – pierwsze skojarzenie

Pytanie było następujące: 7. Proszę napisać pierwsze określenie, jakie się Panu/Pani kojarzy ze słowem ”matematyka”

Odpowiedzi respondentów można pogrupować w kilka kategorii:

I. Odpowiedzi typu: liczba, liczenie, dodawanie i odejmowanie, działania, cyfry, dużo, dużo cyferek. Jest to widzenie matematyki poprzez pryzmat pierwszych pojęć kształtowanych na lekcjach, oraz najbardziej podstawowych zastosowań umiejętności matematycznych w życiu codziennym.

II. Odpowiedzi typu: myślenie, uporządkowanie. Jest to widzenie matematyki jako ludzkiej aktywności.
III. Odpowiedzi typu: ścisły, nauka, porządek, logika, królowa nauk, nauka ścisła, ścisły umysł, gimnastyka. Charakteryzują one matematykę jako dostojną dyscyplinę. Jest to widzenie matematyki szkolnej przez pryzmat ścisłej dyscypliny naukowej, lub sformalizowanych działań.
IV. Odpowiedzi typu: trudne, trudność, stres, potwór, kłopoty, nie lubię, ciężki przedmiot, trudne zadania. Są to więc wypowiedzi opisujące i charakteryzujące negatywne emocje, które wzbudza przedmiot.
V. Odpowiedzi typu: niewiadoma, twierdzenie Pitagorasa, ekierka, pętle, zbiory, kwadrat, tabliczka mnożenia, ułamki, ciągi, równania. Są to skojarzenia z bardzo specyficznymi treściami i zagadnieniami, przerabianymi w trakcie nauki szkolnej. Treści takie pojawiały się pojedynczo, żadne z tych określeń nie powtórzyło się u dwóch osób.
VI. Brak odpowiedzi.

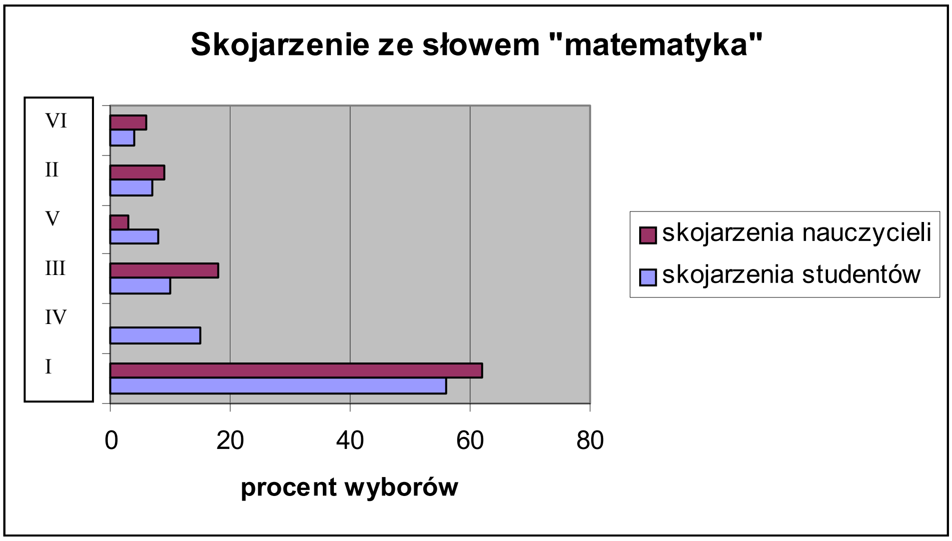
Oto pierwsze skojarzenia studentów – przyszłych nauczycieli oraz czynnych nauczycieli. Są to dane ilościowe i procentowe, uporządkowane malejąco.

Studenci				Nauczyciele			
Lp.	Kategoria	Ilość	%	Lp.	Kategoria	Ilość	%
1	I	65	56	1	I	21	62
2	IV	18	15	2	III	6	18
3	III	12	10	3	II	3	9
4	V	10	8	4	VI	2	6
5	II	8	7	5	V	1	3
6	VI	5	4	6	IV	0	0
Razem		118	100	Razem		33	100

U studentów najliczniejsze było skojarzenie z pierwszą kategorią, czyli pierwsze skojarzenie jest raczej buchalterskie. Matematyka to świat liczb i cyferek, gdzie do znudzenia wykonuje się dodawania i odejmowania. Taki obraz ma ponad połowa respondentów. U drugiej połowy głosy rozłożyły się pomiędzy mocne negatywne emocje (15%), potem - podziw i szacunek jak dla trudno dostępnej wartości wyższej (10%). Niektórym zapadły mocno w pamięć epizody i pojedyncze tematy z lekcji matematyki (8%). Jedynie 7% traktuje matematykę jako sposób myślenia i porządkowania, jako typ ludzkiej aktywności.

Te sam problem w grupie czynnych nauczycieli wygląda nad wyraz podobnie. Odbiór buchalterski jest na jeszcze wyższym poziomie niż u studentów (62%). Wzrasta przy tym podziw dla matematyki jako dostojnej dyscypliny (18%). Jednak tak samo jak i studenci – w bardzo małym stopniu (9%) traktują matematykę jako wytwór ludzkiej aktywności.
Nauczyciele za to nie boją się już matematyki. Żadnemu z nich nie kojarzy się ona ze stresem, trudnymi zadaniami, z pokonywaniem problemów. Czy jest to obraz matematyki widzianej przez pryzmat nauczycielskich doświadczeń, czy pozycji dziecka? W jakim stopniu nauczyciele są świadomi, że uczące się dziecko jest w tej samej sytuacji, w jakiej oni byli przed laty?

Na wykresie zestawiam skojarzenia studenckie z odpowiadającymi im skojarzeniami czynnych nauczycieli.



To zestawienie sygnalizuje dość znamienne zjawisko. Okazuje się, że tak naprawdę poglądy na matematykę szkolną w obu grupach różnią się jedynie wspomnieniami złych emocji. Złe wspomnienia (wyniesione ze szkoły – podstawowej, czy średniej) są jeszcze bardzo silne w grupie studentów rozpoczynających zajęcia z matematyki na studiach i nieobecne w grupie nauczycieli czynnych. Ale w swej podstawowej wymowie obraz matematyki u osób przez studiami, i po studiach jest taki sam. Może to świadczyć o tym, że zajęcia z matematyki wyglądają od lat tak samo, niezależnie od zmian w systemie edukacyjnym, zmian w programach nauczania, i całego rozwiniętego systemu kształcenia nauczycieli.

3. Preferencje postawy konstruktywista – formalista

Pytanie ankiety było następujące:

8. Proszę określić swój pogląd na następujące opinie, przyjmując kod:
   - 0 – Nie zgadzam się
   - 1 – Trochę się zgadzam
   - 2 – W dużym stopniu się zgadzam
   - 3 – Całkowicie się zgadzam

	0	1	2	3
a. W matematyce znaczną część materiału trzeba nauczyć się tak, jak to jest napisane w książce	☐	☐	☐	☐
b. Pojęcia matematyczne są powiązane ze sobą i nie trzeba każdej rzeczy uczyć się oddzielnie.	☐	☐	☐	☐
c. W uczeniu się matematyki pomaga dostrzeganie podobieństw; np. między własnościami sumy i własnościami iloczynu.	☐	☐	☐	☐
d. W uczeniu się matematyki najważniejsze jest, by znać metody rozwiązywania zadań; np. metodę rozwiązywania zadań na porównywanie różnicowe.	☐	☐	☐	☐
e. Na lekcjach matematyki każdy może być aktywny.	☐	☐	☐	☐
f. Matematyka to nauka dla wybranych.	☐	☐	☐	☐
g. W matematyce zawsze otrzymujemy pewne odpowiedzi na wszystkie pytania.	☐	☐	☐	☐
h. Tworzenie matematyki polega na znajdywaniu ogólnych reguł dla pojedynczych faktów.	☐	☐	☐	☐
i. Nauczyciel matematyki powinien zawsze wszystko jasno wytłumaczyć i pokazać; np. jak się dodaje z przekroczeniem progu dziesiątkowego.	☐	☐	☐	☐
j. Matematykę każdy tworzy samodzielnie dla siebie.	☐	☐	☐	☐
k. W matematyce uczeń może sam wymyślać sposoby rozwiązywania zadań; np. sposoby mnożenia w pamięci liczb dwucyfrowych.	☐	☐	☐	☐
l. W matematyce wszystko trzeba robić według z góry określonych reguł.	☐	☐	☐	☐
ł. Matematyka powstała na drodze abstrahowania i uogólniania;	☐	☐	☐	☐

tak powstało np. pojęcie liczby.
m. W zadaniu matematycznym nie ma miejsca na dowolność interpretacji.
n. Źródłem podstawowych pojęć matematycznych jest świat wokół nas, i nasze w nim działania, np. przedmioty z otoczenia są źródłem pojęć geometrii.
o. Pojęcia matematyczne (np. pojęcie prostej) nie mają żadnego związku z rzeczywistością
p. Na lekcji matematyki każdy uczeń powinien i może myśleć samodzielnie.
r. W matematyce szkolnej niczego nie wymyśla się samemu.

3.1 Preferencje w ocenie poszczególnych problemów z punktu 8 ankiety.

Wyniki tego pytania okazują deklaratywną wiedzę nauczycieli o matematyce szkolnej i o roli nauczyciela. Jednak obraz, jaki te odpowiedzi rysują, jest dość niepokojący.
Zanim przejdę do szczegółowych analiz wyników tego pytania, przedstawię zbiorcze punktowe wyniki odpowiedzi a-r, oraz średnią wynikającą z ilości respondentów. Kolorem żółtym zaznaczyłam najwyższe oceny, - zielonym - najniższe

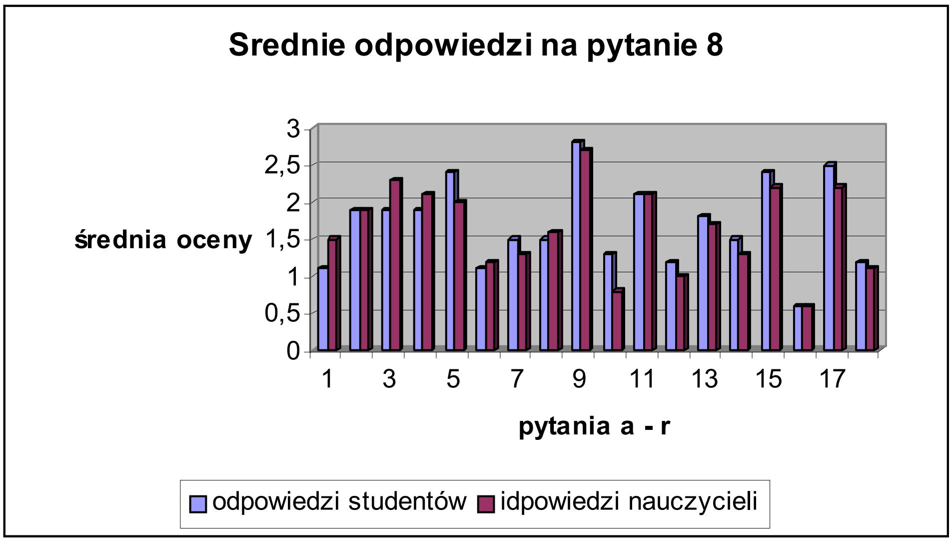
Grupa przyszłych nauczycieli – studentów studiów zaocznych

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Pytanie	a	b	c	d	e	F	g	h	i	j	k	l	ł	m	n	o	p	r
Średnia	1,1	1,9	1,9	1,9	2,4	1,1	1,5	1,5	2,8	1,3	2,1	1,2	1,8	1,5	2,4	0,6	2,5	1,2

Dla porównania – te same wyniki w grupie nauczycieli czynnych zawodowo:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Pytanie	a	b	c	d	e	F	g	h	I	j	k	l	ł	m	n	o	p	r
Średnia	1,5	1,9	2,3	2,1	2,0	1,2	1,3	1,6	2,7	0,8	2,1	1,0	1,7	1,3	2,2	0,6	2,2	1,1

Można uważać, że wypowiedzi nauczycieli są bardziej stonowane – nauczyciele nie deklarują odpowiedzi skrajnych (za 0, czy 3 punkty), choć generalnie więcej jest wypowiedzi akceptujących. Jednak w wielu sytuacjach ich wypowiedzi maja ten sam wydźwięk, co wypowiedzi studentów. Oto graficzne zestawienie powyższych wyników.



W obu grupach największą akceptowalność miały stwierdzenia:
(9) i – nauczyciel matematyki powinien zawsze wszystko jasno wytłumaczyć i pokazać (2,8 oraz 2,7)

(17) p – na lekcji matematyki każdy uczeń powinien i może myśleć samodzielnie (2,5 oraz 2,2)
(15) n – źródłem podstawowych pojęć matematycznych jest świat wokół nas i nasze w nim działania (2,4 oraz 2,2)

Dodatkowo, przyszli nauczycieli wciąż wierzą, że **e-** na lekcjach matematyki każdy może być aktywny (2,4), co ma raczej wymowę społeczną, kiedy to nauczyciele praktycy raczej zwracają uwagę na fakt , że **c-** w uczeniu się matematyki pomaga dostrzeganie podobieństw; np. między własnościami sumy i własnościami iloczynu (2,3), zwracają więc uwagę na techniczną stronę uczenia się matematyki

O czym mówią wybory najmniej akceptowane? Obie grupy twierdzą, że nie jest prawdą, że
(16) o - pojęcia matematyczne (np. pojęcie prostej) nie mają żadnego związku z rzeczywistością (0,6 oraz 0,6)
(6) f - matematyka to nauka dla wybranych (1,1 oraz 1,2)
(12) l - w matematyce wszystko trzeba robić według z góry określonych reguł (1,2 oraz 1,0)
(18) r - w matematyce szkolnej niczego nie wymyśla się samemu (1,2 oraz 1,1)

Zestawienie takie pokazuje na dość specyficzne widzenie swojej roli (nauczyciel – przewodnik), i w specyficznym świetle stawia stwierdzenia o własnej aktywności dziecka. Nauczyciele są przekonani o konieczności bardzo dokładnego zapoznania uczniów z faktami i umiejętnościami wchodzącymi w zakres programu nauczania. Mimo, że widzą związek matematyki z otaczającą rzeczywistością (o), nie ma w nich przekonania, ze dziecko może samo dostrzec istotne matematyczne związki. Owszem zgadzają się, że każde dziecko może znaleźć dla siebie kącik w „matematycznym salonie" (f), może samo wymyślać różne rzeczy (l, r), ale jakby do matematyki nie ma zastosowania pedagogika zabawy i własnej kreatywności dziecka. Wygląda na to, że owszem, uczeń może robić pewne rzeczy po swojemu, ale musi się to odbywać pod kontrolą nauczyciela i w kierunku ogólnie przyjętych algorytmów (c). Nauczyciele czują potrzebę prowadzenia dziecka za rękę – i w najlepszym wypadku podpowiadania mu (jeżeli nie narzucania) „najlepszych", gotowych rozwiązań, wskazywania związków i analogii. To nauczyciel powinien wszystko jasno wytłumaczyć i pokazać (i) – co do tego faktu nikt nie ma żadnych wątpliwości ani przyszli nauczyciele, ani ci, którzy właśnie uczą.
Uczeń w takim razie wcale nie ma być kreatywny. Uczeń ma być posłuszny, podążający za tokiem myślenia nauczyciela. Powinien myśleć, aby zrozumieć, co nauczyciel chciał mu wytłumaczyć. Z ankiety wynika, że nauczyciele i przyszli nauczyciele są zdania, że nie jest prawdą, że każdy uczeń tworzy matematykę dla siebie (j – 1,3 oraz tylko 0,8); to nauczyciel wie co jest ważne a co nie, bo nauczyciel zna matematykę, a uczeń nie.

Potwierdzeniem takiej interpretacji jest wynik dla pytania (h). Bardzo niepokojące jest, że ani studenci ani nauczyciele nie akceptują opinii, że tworzenie matematyki polega na znajdywaniu ogólnych reguł dla pojedynczych faktów ((h) – ocena 1,5 oraz 1,6). To na czym polega tworzenie matematyki? Wydaje się, że w opinii nauczycieli (przyszłych i obecnych), w matematyce nie *tworzenie* jest podstawową aktywnością, a *nabywanie* wiedzy. Zmiana takiego nastawienia jest podstawowym zadaniem, który stoi przed osobami i instytucjami kształcącymi nauczycieli.

3.2. Nauczyciel – konstruktywista, czy nauczyciel – formalista?

Ocena zaproponowanych stwierdzeń o matematyce i jej nauczaniu miała ukazać preferencje w postawach: konstruktywistycznej i formalistycznej. Postawę konstruktywistyczną moim zdaniem prezentują nauczyciele, optujący za wysoką akceptacją odpowiedzi: b, c, e, h, j, k, ł, n, p, zaś w pozostałych przypadkach ich akceptacja jest niska. Na odwrót – wysoka akceptacja wypowiedzi a, d, f, g, i, l, m, o, r , przy niskiej akceptacji wypowiedzi pozostałych, moim zdaniem charakteryzuje postawę formalistyczną w nauczaniu matematyki.

Zestawiłam osobno wyniki z kolumn : b,c,e,h,j,k,ł,n, p-czyli dla wyborów „konstruktywistycznych", oraz pozostałe: a,d,f,g,i,l,m,o,r, - czyli formalistyczne

Tabelka ujmuje wyniki zbiorcze, na grupie 118 studentów

	konstruktywistyczna	formalistyczna	Zdecydowanie konstruktywistyczna	Zdecydowanie formalistyczna
Ilość	79	29	26	2
Procent	67	25	22	2

Analizując osobno wybory „konstruktywistyczne" i "formalistyczne", zauważamy interesujące zjawisko. 79 studentów (67%) respondentów deklaruje postawę konstruktywistyczną, a jedynie 29 studentów – czyli 25% postawę formalistyczną. Ale bardziej dogłębna analiza tych wyników pozwala zauważyć, że wielu studentów można zakwalifikować do obu grup jednocześnie. Taka analiza wykazuje, że tak naprawdę jest tylko 26 zdecydowanych wyborów konstruktywistycznych (22%) i 2 zdecydowanie formalistyczne (2%). Wynika z tego, że tylko 24% przyszłych nauczycieli matematyki wyraźnie wie, jaką przyjąć postawę wobec matematyki szkolnej; inaczej mówiąc – tylko 28 osób ma jasny pogląd na matematykę. Należy przypomnieć, że wciąż w tej grupie są studenci, którzy uważają, że uczniowi należy wszystko dokładnie wytłumaczyć. Stanowi to ogromne wyzwanie dla uczelni kształcącej nauczycieli. Z ankiety wynika bowiem, ze pozostała część słuchaczy, pozostawiona w takim stanie jaki prezentuje obecnie, będzie wprowadzać olbrzymi chaos w pracy z dzieckiem. Studenci ci albo są generalnie nijacy i nie zgadzają się z żadnym poglądem, albo ambiwalentni i w różnych sytuacjach zachowują się różnie (czyli - niekonsekwentnie). Świadczy o tym następny etap analizy wyników, w którym zestawiłam sprzeczne odpowiedzi indywidualnych respondentów.

Przykłady postawy „rozchwianej"

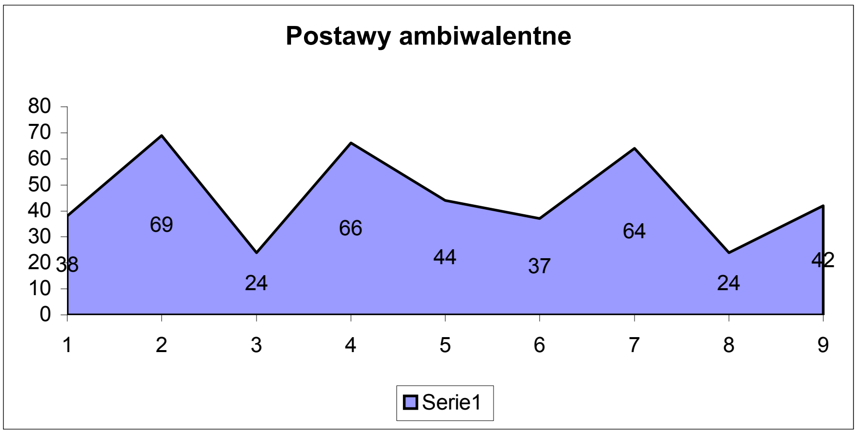
1. Wybory a-b. Studenci na ogół nie zgadzają się z opinia, że w matematyce znaczną część materiału trzeba nauczyć się tak, jak to jest napisane w książce (a - 1,1), Jednak dość trudno akceptują fakt, że pojęcia matematyczne są powiązane ze sobą i nie trzeba każdej rzeczy uczyć się oddzielnie (b – 1,9). Na dodatek są takie osoby których wypowiedzi przeczą sobie nawzajem – deklarując równie wysoką akceptację dla uczenia się wszystkiego dokładnie tak jak w książce, i dla faktu, że nie trzeba wszystkiego uczyć się oddzielnie; inna grupa nie zgadza się ani z jedna, ani z drugą opinią. Tak zachowuje się 38% respondentów. Wynika z tego, że przyszli nauczyciele nie mają jasnego stanowiska wobec matematyki i jej wewnętrznej struktury, jak i jej reprezentacji przedstawionej w podręcznikach.
2. Wybory c-d. Czy respondenci dostrzegli, że są to dwie przeciwstawne postawy? Chyba jednak nie. Zarówno bowiem na stwierdzenie (c): w uczeniu się matematyki pomaga dostrzeganie podobieństw; np. między własnościami sumy i własnościami iloczynu, jak i na (d): w uczeniu się matematyki najważniejsze jest by znać metody rozwiązywania zadań; np. metodę rozwiązywania zadań na porównywanie różnicowe, mają tę samą średnią ocenę 1,9. Jest to dość niska ocena, przemawiająca raczej za tym, że studenci nie zgadzają się z tymi stwierdzeniami. Jasny pogląd w tej sytuacji

deklarują osoby, która dla wyborów c –d wybrała przeciwstawne oceny. Takich osób wśród przebadanych studentów było tylko31% - z tego wynika, że 69% ma postawę ambiwalentną.

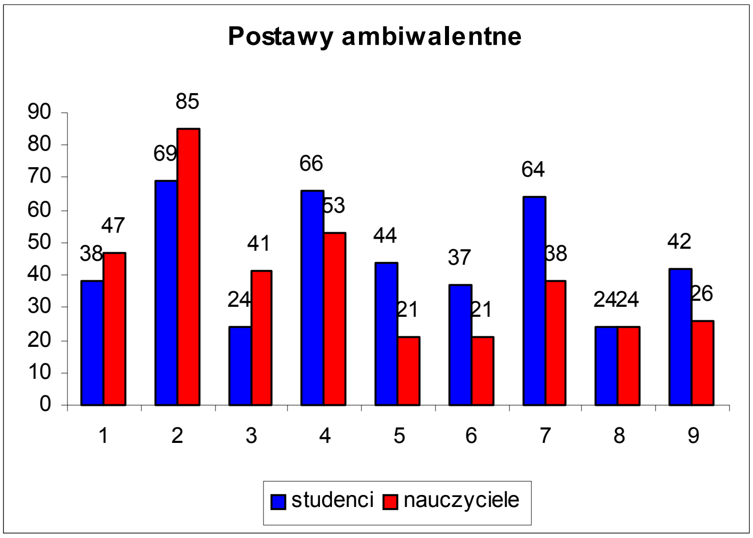
3. Wybory e-f. Nawet w tak czytelnej (zdawałoby się) sytuacji było 24% osób niezdecydowanych, i w niejednoznaczny sposób oceniających związek między stwierdzeniami: „na lekcjach matematyki każdy może być aktywny" oraz „matematyka to nauka dla wybranych". Stawia to w złym świetle deklaracje o własnej, nieskrępowanej aktywności ucznia.
4. Wybory g-h. To zestawienie było bardzo nieoczywiste dla przyszłych nauczycieli. Aż 66% respondentów nie spolaryzowało swoich odpowiedzi, nie potrafiąc zadeklarować wyraźnie swojej filozofii wobec matematyki. Pewnie te dwa pytania rzeczywiście wymagały najgłębszego wniknięcia w istotę matematyki. Pytanie (g) brzmiało: w matematyce zawsze otrzymujemy pewne odpowiedzi na wszystkie pytania. Punkt g miał niska wybieralność (ogólna ocena – 1,5), i 45% przyszłych nauczycieli nie zgodziło się z tą opinią. Co jednak znaczy taka odpowiedź? Czy jest ona wyrazem przekonania, ze matematyka to nauka poszukująca, nauka w której stawia się i weryfikuje hipotezy? Czy może jest to odniesienie do własnych doświadczeń w rozwiązywaniu zadań matematycznych? Pytanie (h) mówi o „tworzeniu" matematyki, i to poprzez znajdowanie reguł w pojedynczych faktach. Taką koncepcję matematyki zarysowują światowe wyniki badań nad umiejętnością matematyzowania u małych dzieci, takie są też dalekosiężne cele uczenia matematyki. Uczestnicy ankiety z taką opinią się jednak nie identyfikują (ocena ogólna 1,5) i to w tym samym stopniu, co ze stwierdzeniem zawartym w pytaniu g.
5. Wybory i-j. Wydawało się, że to rozróżnienie jest bardzo czytelne. Wyniki badań pokazują, że nie - dla 44% respondentów. Z wyborem (i) zgadzali się praktycznie wszyscy. Ale z konstruktywistycznego punktu widzenia nauczyciel, który wszystko bardzo dokładnie tłumaczy nie jest dobrym nauczycielem. Taki nauczyciel nie zmusza do wysiłku umysłowego, nie pozwala na własne poszukiwania, narzuca sposób myślenia. Nie ma więc mowy o tworzeniu własnej matematyki przez ucznia. Przy wysokiej akceptacji stwierdzenia (i) byłoby więc logiczne, że stwierdzenie (j) : matematykę każdy tworzy samodzielnie dla siebie, osiągnie niską ocenę. Globalna ocenia jest rzeczywiście dość niska (1,3), ale w poszczególnych przypadkach nie postępuje ona jako konsekwencja wysokiej oceny dla (i).Wynika z tego po raz kolejny, że przyszli nauczyciele nie rozróżniają pomiędzy aktywnym i twórczym zmaganiem się z problemami (problemowe nauczanie matematyki), połączonym z samodzielnym dobieranie metod działania, a odtwórczym przyswajaniem gotowej wiedzy.
6. Wybory k-l. W tej sytuacji 37% nauczycieli nie potrafiło zająć zdecydowanej postawy. A wydawałoby się, że trudno o jaśniejsze przeciwstawienie: w matematyce uczeń może sam wymyślać sposoby rozwiązywania zadań (k), lub: w matematyce wszystko trzeba robić według z góry określonych reguł (l).
7. Wybory ł-m. Te dwa pytania dotyczyły istoty matematycznego myślenia. Pytanie ł: „Matematyka powstała na drodze abstrahowania i uogólniania" jest stwierdzeniem mówiącym o tworzeniu pojęć matematycznych i procesach myślowych temu towarzyszących. Pytanie (m): „w zadaniu matematycznym nie ma miejsca na dowolność interpretacji" wskazuje na istotną rolę własnych interpretacji, skojarzeń i wyobrażeń (własnej sieci kognitywnej) przy posługiwaniu się pojęciami i procedurami matematycznymi. Niestety, aż 64 % przyszłych nauczycieli nie polaryzuje swego stanowiska w tych dwóch kwestiach.

8. Wybory n-o .24% nauczycieli nie może się zdecydować, czy można przyjąć, że świat wokół nas, i nasze w nim działania, są źródłem pojęć matematycznych, czy może jest odwrotnie - pojęcia matematyczne (np. pojęcie prostej) nie mają żadnego związku z rzeczywistością?
9. Również interesujące jest zestawienie kolumn p – r: Oceny wystawione przez respondentów są różne: 2,5 dla stwierdzenia (p) oraz 1,2 dla stwierdzenia r. Wydawać się więc może, że deklaracja ”uczeń powinien myśleć samodzielnie” dobrze przeciwstawia się stwierdzeniu „w matematyce niczego nie wymyśla samemu” Jednak tak nie jest, gdyż aż 42% uczestników ankiety odpowiada podobnie (na „tak” lub „nie”) w obu przypadkach. Jest to kolejne potwierdzenie postawy, że rozumowania ucznia powinny być zgodne z kierunkami wytyczonymi przez nauczyciela, i pod pełną jego kontrolą. Taka postawa jest dość niebezpieczna. Stwarza bowiem pozory „wolności myśli”, otwartości na samodzielne poszukiwania ucznia. Postawa jest pozornie otwarta, gdyż w świetle deklaracji nauczycieli tylko te rozwiązania zostaną na lekcji zaakceptowane, które są ocenione przez nauczyciela jako prawidłowe. Ocena rozwiązania jako prawidłowego lub nie jest tworzona na podstawie zgodności z ustalonymi już algorytmami i regułami obowiązującymi w matematyce jako nauce (np. dodawanie z przekroczeniem progu dziesiątkowego). Nie bardzo wiadomo, jak w takim układzie zmieścić dyskusję, słuchanie argumentacji innych, wypracowywanie wspólnego stanowiska w odniesieniu do pewnych reguł jako umów.

Poniższe zestawienie pokazuje, w którym zestawieniu pytań respondenci zachowywali się najbardziej niespójnie.



Jak widać, są to układy stwierdzeń (2) c-d (69%), (4) g-h (66%) i (7) ł-m (64%), i są to układy związane z rozumieniem jaka jest istota matematyki jako dorobek myśli i jako ludzka aktywność, jaka jest natura i epistemologia pojęć matematycznych. Są to podstawowe zagadnienia, które powinny wytyczać działania nauczyciela podczas pracy z uczniami. Okazuje się, że podobne zestawienie odpowiedzi w grupie czynnych nauczycieli daje w dalszym ciągu podobny wynik. Obrazuje to diagram



Nauczyciele i studenci maja kłopoty z zajęciem zdecydowanej postawy w tych samych kwestiach, co dodatkowo widać w następnym zestawieniu.

Lp	Zestawienie	Studenci (%)		Nauczyciele (%)
1	c-d	69	c-d	85
2	g-h	66	g-h	53
3	ł-m	64	a-b	47
4	i-j	44	e-f	41
5	p-r	42	ł-m	38
6	a-b	38	p-r	26
7	k-l	37	n-0	24
8	e-f	24	i-j	21
9	n-o	24	k-l	21

Literatura:

Abrantes, P. (2001) Revisiting The Goals and The Nature of Mathematics For All in the Context of a National Curriculum, *Proceedings of the 25th Conference of PME25,* Utrecht, The Netharlands, Vol.1.

Freudenthal, H. (1978), *Wedding and Sowing,* D. Reidel Publ. Co., Dordrecht.

Gray, E., Tall. D.: (1994) Duality, Ambiguity and Flexibility:A Proceptual View of Simple Arithmetic

Hejny, M. Kurina, F. (2001): *Dite, skola a matematika. Konstruktivisticke pristupy k vyucovani,* Portal, Praha.

Krainer, K. (1999) Teacher Education and Investgation into Teacher education: a Conference as a Learning Environmet. *Proceedings of CERME1, III.* Forschungsinstitut fur Mathematikdidaktik, Osnabruck.

da Ponte. JP. (1999): Teachers' Beliefs and Conceptions as a Fundamental Topic in Teacher Education, *Proceedings of CERME1, III.* Forschungsinstitut fur Mathematikdidaktik, Osnabruck.

da Ponte, JP, Oliviera, H., Varandas, JM., (2002). Development of Pre-Service Mathematics Teachers' Professional Knowledge and Indentity in Working with Information and Communication Technology, *Journal of Mathematics Teacher Education* **5:** 93-115, 2002, Kluwer Academic Publishers.

da Ponte, JP., Segurado M.T., Oliveira H., (2003), A collaborative project using narratives. What happens when pupils work on mathematical investigations? *A.Peter-Koop et al (eds) Collaboration in Teacher Education, 85-97,* Kluwer Academic Publishers.

Steinbring, H. (2003). *The construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interactions, an Epistemological Perspective,* Manuscript Dortmund: Universitat Dortmund.

Tall, D. (1996) *The Psychology of Advanced Mathematical Thinking: Biological Brain and Mathematical Mind*

Wittmann E. Ch.: (2001) Designing, Researching and Implementing Mathematical Learning Environments, The Research Group „Mathe 2000", *Proceedings of the 25th Conference of International Group of Mathematics Education, PME25,* Utrecht, ed. Marja van den Heuvel-Panhuizen, vol.1. 189).

Wood, T. (1998). Creating classroom interactions for mathematical reason: beyond "natural teaching", *Proceedings of CIEAEM 49, Setubal 24 –30 July 1997.* ed. Abrantes P., Porfirio J., Baia M., Portugalia.